

第2讲 圆的综合加油站

一、直线与圆的位置关系

练习1

1. 2020~2021学年10月江苏苏州高新区苏州市高新区实验初级中学初三上学期月考第14题3分 ★★

⊙ O 的半径为 5 , 圆心 O 到直线 l 的距离是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的一个根 , 则直线 l 与 ⊙ O 的位置关系是 _____ .

【答案】 相交

【解析】 $\because x^2 - 7x + 12 = 0$,

$$\therefore (x - 3)(x - 4) = 0 ,$$

$$\text{解得 : } x_1 = 3 , x_2 = 4 ,$$

$\therefore$ 点 O 到直线 l 距离是方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的一个根 , 即为 3 或 4 ,

$\therefore$ 点 O 到直线 l 的距离 $d = 3$ 或 4 ,

$$r = 5 ,$$

$$\therefore d < r ,$$

$\therefore$ 直线 l 与圆相交 .

故答案为 : 相交 .

【标注】 【知识点】 直线和圆的位置关系

2. 2020~2021学年10月江苏徐州鼓楼区徐州市树人中学初三上学期月考第12题4分 ★★

已知 ⊙ O 的直径等于 12cm , 圆心 O 到直线 l 的距离为 5cm , 则直线 l 与 ⊙ O 有 _____ 个交点 .

【答案】 2

【解析】 根据题意 , 得该圆的半径是 6cm ,

即大于圆心到直线的距离 5cm , 则直线和圆相交 ,

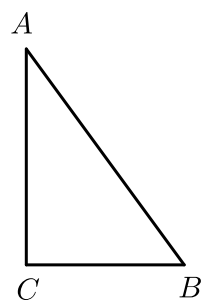
故直线 l 与 ⊙ O 的交点个数为 2 .

故答案为 : 2 .

【标注】 【知识点】 直线和圆的位置关系

3. 2017~2018学年湖北十堰丹江口市初三上学期期中第6题3分 ★★

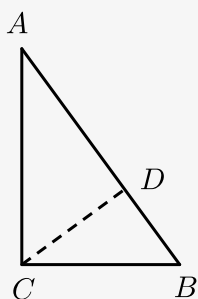
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 3\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ，以点 C 为圆心，以 2.5cm 为半径画圆，则 $\odot C$ 与直线 AB 的位置关系是（ ）。



- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ，如图所示：



$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 3\text{cm}$ ， $AC = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \times BC = \frac{1}{2}AB \times CD,$$

$$\therefore 3 \times 4 = 5CD,$$

$$\therefore CD = 2.4 < 2.5,$$

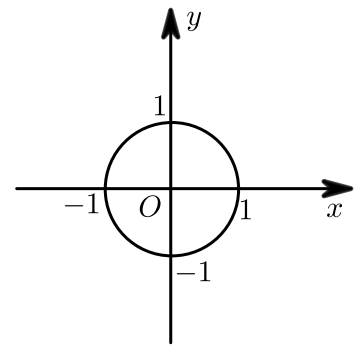
即 $d < r$ ，

$\therefore$ 以 2.5 为半径的 $\odot C$ 与直线 AB 的关系是相交。

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

4. 2018~2019 学年山东临沂费县初三上学期期末第8题3分 ★★

如图，在平面直角坐标系中， $\odot O$ 的半径为 1 ，则直线 $y = x - \sqrt{2}$ 与 $\odot O$ 的位置关系是（ ）。



- A. 相离 B. 相切
C. 相交 D. 以上三种情况都有可能

【答案】 B

【解析】 $\because$ 令 $x=0$, 则 $y=-\sqrt{2}$; 令 $y=0$, 则 $x=\sqrt{2}$,

$$\therefore A(0, -\sqrt{2}) , \quad B(\sqrt{2}, 0) ,$$

$$\therefore OA = OB = \sqrt{2},$$

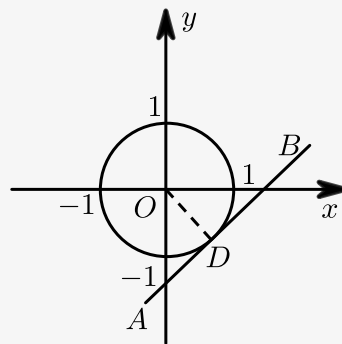
$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB = 2,$$

过点 O 作 $OD \perp AB$, 则

$$OD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1 ,$$

$\therefore$ 直线 $y = x - \sqrt{2}$ 与 $\odot O$ 相切.

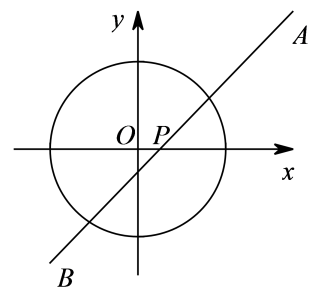


【标注】 **【知识点】** 直线和圆的位置关系

练习2

5. 2017~2018学年12月北京东城区北京五中分校初三上学期月考第10题2分 ★★

如图，在平面直角坐标系中，已知 $\odot O$ 的半径为1，动直线 AB 与 x 轴交于点 $P(m, 0)$ ，直线 AB 与 x 轴夹角为 45° ，若直线 AB 与 $\odot O$ 有公共点，则 m 的取值范围是（ ）.



- A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ B. $-1 < m < 1$ C. $0 \leq m \leq \sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$

【答案】 D

【解析】当直线 AB 分别为 $\odot O$ 相切时， $m = \pm\sqrt{2}$ ，

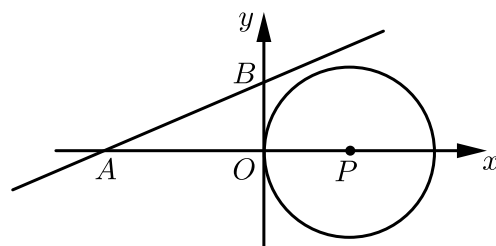
$\therefore$ 直线 AB 与 $\odot O$ 有公共点，

$\therefore -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

6. 2020~2021学年12月浙江杭州拱墅区杭州市文澜中学初三上学期周测B卷第10题 ★★

如图，直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点，圆心 P 的坐标为 $(1, 0)$ ，圆 P 与 y 轴相切于点 O 。若将圆 P 沿 x 轴向左移动，当圆 P 与直线相交时，横坐标为整数的点 P 的个数是 ()。



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】若圆和直线相切，则圆心到直线的距离应等于圆的半径 1，

据直线的解析式求得 $A(-3, 0)$ ， $B(0, \sqrt{3})$ ，

则 $\tan \angle BAO = \frac{BO}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

所以 $\angle BAO = 30^\circ$ ，

所以当相切时， $AP = 2$ ，

点 P 可能在点 A 的左侧或右侧。

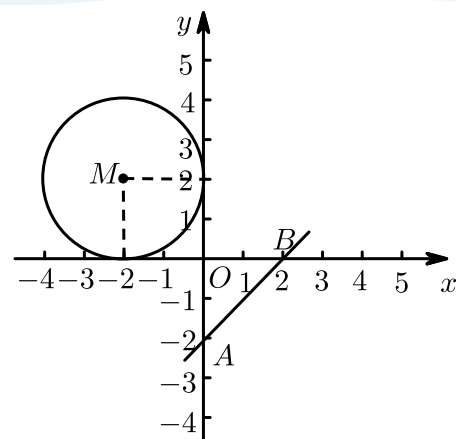
所以圆 P 与直线相交时， $AP < 2$ ，

此时横坐标为整数的点 P 有 $(-2, 0)$ ， $(-3, 0)$ ， $(-4, 0)$ 三个。

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

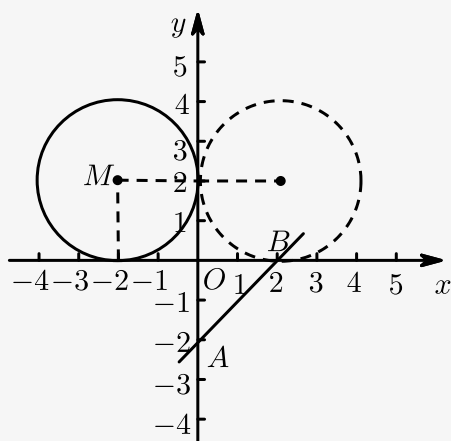
7. 2012~2013学年北京石景山区初三上学期期末第11题 ★★

如图， $\odot M$ 的圆心为 $M(-2, 2)$ ，半径为 2，直线 AB 过点 $A(0, -2)$ ， $B(2, 0)$ ，则 $\odot M$ 关于 y 轴对称的 $\odot M'$ 与直线 AB 的位置关系是 _____。



【答案】 相交

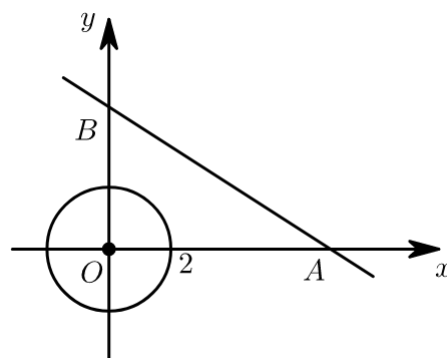
【解析】 $\odot M$ 的圆心为 $M(-2, 2)$ ，则 $\odot M$ 关于 y 轴对称的 $\odot M'$ 的圆心为 $M'(2, 2)$ ，半径为 2，由图可知 $\odot M'$ 与直线 AB 的位置关系是相交。



【标注】 【知识点】直线和圆的位置关系

8. 2017~2018学年10月江苏扬州邗江区扬州邗江实验学校初三上学期月考第17题3分 ★★★

如图，一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + a$ ($a > 0$) 的图象与坐标轴交于 A ， B 两点，以坐标原点 O 为圆心，半径为 2 的 $\odot O$ 与直线 AB 相离，则 a 的取值范围是 _____。



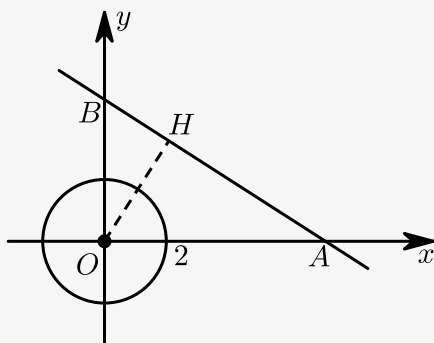
【答案】 $a > \sqrt{5}$

【解析】当 $y = 0$ 时， $-\frac{1}{2}x + a = 0$ ，解得 $x = 2a$ ，则 $A(2a, 0)$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = -\frac{1}{2}x + a = 0$ ，则 $B(0, a)$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $AB = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$ ，

过 O 点作 $OH \perp AB$ 于 H ，如图，



$$\therefore \frac{1}{2} \cdot OH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA,$$

$$\therefore OH = \frac{a \cdot 2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a,$$

$\therefore$ 半径为 2 的 $\odot O$ 与直线 AB 相离，

所以 $OH > 2$ ，即 $\frac{2\sqrt{5}}{5}a > 2$ ，

所以 $a > \sqrt{5}$ 。

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

9. ★★★★★

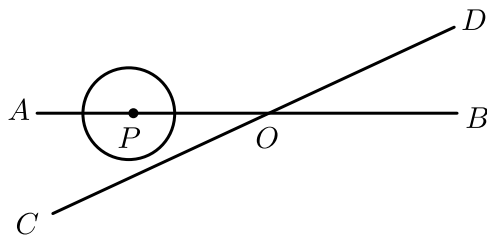
如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ， $\angle AOC = 30^\circ$ ，半径为 1cm 的 $\odot P$ 的圆心在直线 AB 上，开始时，

$PO = 6\text{cm}$ 。如果 $\odot P$ 以 1cm/s 的速度沿由 A 向 B 的方向移动，那么：

当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 _____ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相离。

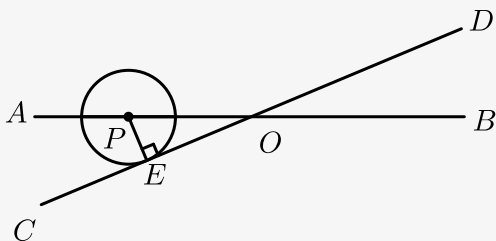
当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 _____ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相切。

当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 _____ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相交。



【答案】 $0 \leq t < 4$ 或 $t > 8$ ； $t = 4$ 或 $t = 8$ ； $4 < t < 8$

【解析】当点 P 在射线 OA 运动时， $\odot P$ 与 CD 相切，如图，过 P 作 $PE \perp CD$ 于 E ，



$$\therefore PE = 1\text{cm},$$

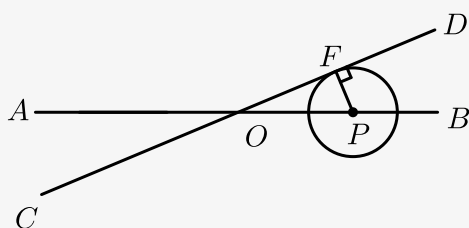
$$\because \angle AOC = 30^\circ,$$

$$\therefore OP = 2PE = 2\text{cm},$$

$\therefore \odot P$ 的圆心在直线 AB 上向右移动了 $(6 - 2)\text{cm}$ 后与 CD 相切，

$$\therefore \odot P \text{移动所用的时间为 } \frac{6-2}{1} = 4 \text{ (秒)};$$

当点 P 在射线 OB 运动时， $\odot P$ 与 CD 相切，如图，过 P 作 $PF \perp CD$ 与 F ，



$$\therefore PF = 1\text{cm},$$

$$\because \angle AOC = \angle DOB = 30^\circ,$$

$$\therefore OP = 2PF = 2\text{cm},$$

$\therefore \odot P$ 的圆心在直线 AB 上向右移动了 $(6 + 2)\text{cm}$ 后与 CD 相切，

$$\therefore \odot P \text{移动所用的时间为 } \frac{6+2}{1} = 8 \text{ (秒)}.$$

故：当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 $0 \leq t < 4$ 或 $t > 8$ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相离。

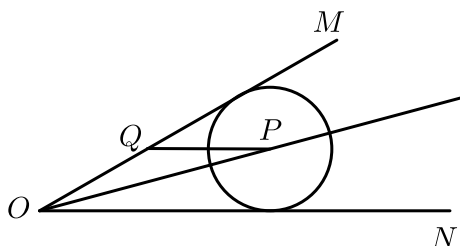
当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 $t = 4$ 或 $t = 8$ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相切。

当 $\odot P$ 的运动时间 $t(\text{s})$ 满足条件 $4 < t < 8$ 时， $\odot P$ 与直线 CD 相交。

【标注】【知识点】直线和圆的位置关系

10. 2020年上海金山区初三中考二模 ★★★

如图， $\angle MON = 30^\circ$ ， OP 是 $\angle MON$ 的角平分线， $PQ \parallel ON$ 交 OM 于点 Q ，以 P 为圆心，半径为4的圆与 ON 相切，如果以 Q 为圆心半径为 r 的圆与 $\odot P$ 相交，那么 r 的取值范围是（ ）。



A. $4 < r < 12$

B. $2 < r < 12$

C. $4 < r < 8$

D. $r > 4$

【答案】 A

【解析】 解：如图，过点 P 作 $PA \perp OM$ 于点 A .

$\therefore$ 圆 P 与 ON 相切，设切点为 B ，连接 PB .

$\therefore PB \perp ON$.

$\therefore OP$ 是 $\angle MON$ 的角平分线，

$\therefore PA = PB$.

$\therefore PA$ 是半径，

$\therefore OM$ 是圆 P 的切线 .

$\therefore \angle MON = 30^\circ$ ， OP 是 $\angle MON$ 的角平分线，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 15^\circ$.

$\therefore PQ \parallel ON$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 15^\circ$.

$\therefore \angle 4 = \angle 1 + \angle 3 = 30^\circ$.

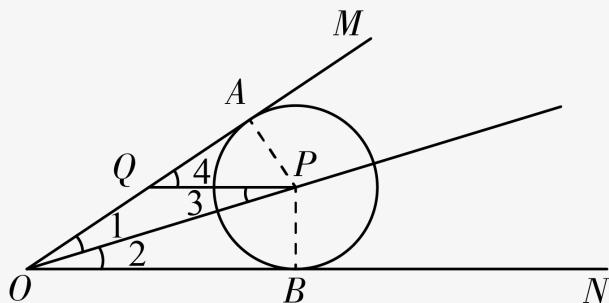
$\therefore PA = 4$ ，

$\therefore PQ = 2PA = 8$.

$\therefore r_{\text{最小值}} = 8 - 4 = 4$ ， $r_{\text{最大值}} = 8 + 4 = 12$.

$\therefore r$ 的取值范围是 $4 < r < 12$.

故选：A .

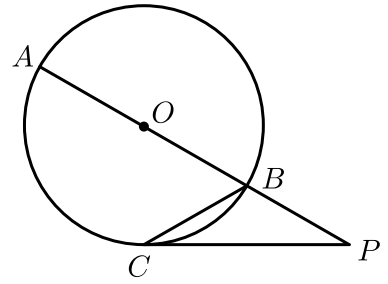


【标注】 【知识点】 根据直线与圆的位置关系求解

练习3

11. 2015年天津红桥区初三中考二模第8题3分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，延长 AB 至点 P ，使 PB 等于半径 OB ，过点 P 作 $\odot O$ 的切线，切点为 C ，则 $\angle ABC$ 的度数等于（ ） .



A. 45°

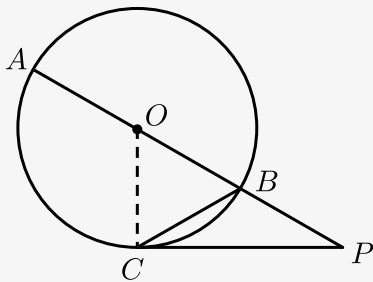
B. 50°

C. 55°

D. 60°

【答案】 D

【解析】 连接 OC ,



$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线 ,

$\therefore OC \perp PC$,

$\therefore \triangle OPC$ 是直角三角形 ,

$\because OB = BP$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}OP$,

$\therefore BC = OB = OC$,

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形 ,

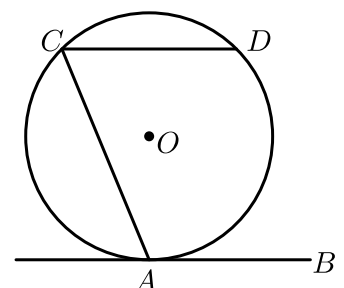
$\therefore \angle ABC$ 的度数等于 60° ,

故选 D .

【标注】 【知识点】切线的性质定理

12. 2017~2018学年安徽合肥蜀山区初三上学期期末第8题4分 ★★★

如图 , $\odot O$ 的半径为 5 , 直线 AB 与 $\odot O$ 相切于点 A , AC 、 CD 是 $\odot O$ 的两条弦 , 且 $CD \parallel AB$, $CD = 6$, 则弦 AC 的长为 () .



A. $6\sqrt{2}$

B. $5\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{5}$

D. $3\sqrt{10}$

【答案】 D

【解析】 连接 AO ，并延长 AO 交 CD 于点 E ，连接 CO 。

$\because AB$ 是切线，

$\therefore AO \perp AB$ 。

又 $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AO \perp CD$ 即 $AE \perp CD$ ，

$\therefore CE = DE = 3$ 。

在 $\text{Rt}\triangle CEO$ 中，

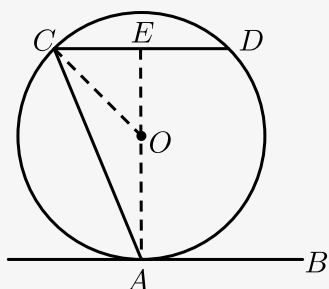
$$EO = \sqrt{CO^2 - CE^2} = 4。$$

$\therefore AE = OA + EO$ ，

$\therefore AE = 4 + 5 = 9$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中， $AC = \sqrt{CE^2 + AE^2} = \sqrt{9 + 81} = 3\sqrt{10}$ 。

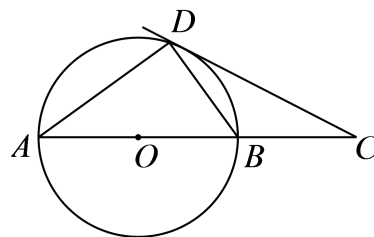
故选 D。



【标注】 【知识点】 切线的性质定理

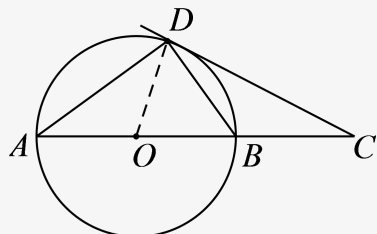
13. 2016年陕西西安莲湖区西安益新中学初三中考一模第11题3分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 AB 的延长线上， CD 与 $\odot O$ 相切，切点为 D 。若 $\angle A = 35^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____。



【答案】 20°

【解析】 连接 OD ，



$\because OA = OD$ ， $\angle A = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle ADO = 35^\circ$ ，

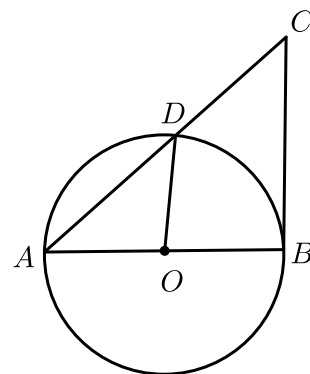
$\therefore \angle COD = \angle A + \angle ADO = 70^\circ$ ，

又 $\because CD$ 与 $\odot O$ 相切，
 $\therefore \angle ODC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = \angle ODC - \angle COD = 20^\circ$ 。

【标注】【知识点】切线的性质定理

14. 2018年福建中考真题第9题4分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 与 $\odot O$ 相切于点 B ， AC 交 $\odot O$ 于点 D ，若 $\angle ACB = 50^\circ$ ，则 $\angle BOD$ 等于（ ）。



- A. 40° B. 50° C. 60° D. 80°

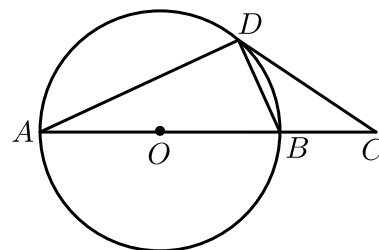
【答案】D

【解析】 $\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线，
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ACB = 40^\circ$ ，
 由圆周角定理得， $\angle BOD = 2\angle A = 80^\circ$ ，
 故选：D。

【标注】【知识点】切线的性质定理

15. 2014年江苏无锡中考真题第8题3分 ★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 的切线，切点为 D ， CD 与 AB 的延长线交于点 C ， $\angle A = 30^\circ$ ，给出下面3个结论：① $AD = CD$. ② $BD = BC$. ③ $AB = 2BC$ ，其中正确结论的个数是（ ）。



- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

【答案】 A

【解析】 如图，连接 OD ，

$\therefore OB = OD$ ，

$\therefore \triangle OBD$ 是等腰三角形．

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore CD \perp OD$ ，

$\therefore \angle ODC = 90^\circ$ ，

$\therefore AB$ 是直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ．

又 $\therefore \angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle DOB = \angle ABD = 60^\circ$ ， $AB = 2OB = 2OD = 2BD$ ．

$\therefore \angle C = \angle BDC = 30^\circ$ ，

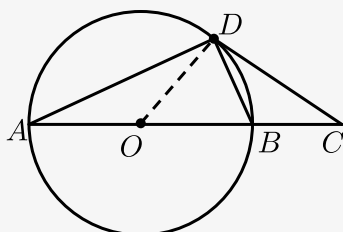
$\therefore BD = BC$ ，②成立．

$\therefore AB = 2BC$ ，③成立．

$\therefore \angle A = \angle C$ ，

$\therefore DA = DC$ ，①成立．

综上所述，①②③均成立．

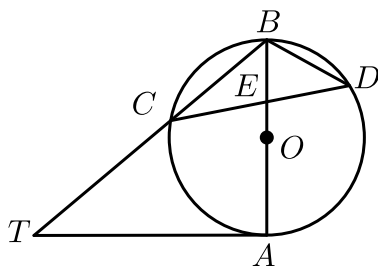


【标注】 【知识点】 切线的性质定理

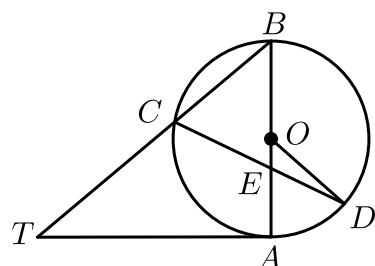
练习4

16. 2017~2018学年9月天津南开区天津崇化中学初三上学期月考第23题10分 ★★★

已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， AT 是 $\odot O$ 的切线， $\angle ABT = 50^\circ$ ， BT 交 $\odot O$ 于点 C ， E 是 AB 上一点，延长 CE 交 $\odot O$ 于点 D ．



图①



图②

(1) 如图①，求 $\angle T$ 和 $\angle CDB$ 的大小．

(2) 如图②，当 $BE = BC$ 时，求 $\angle CDO$ 的大小．

【答案】(1) $\angle T = 40^\circ$, $\angle CDB = 40^\circ$.

(2) $\angle CDO = 15^\circ$.

【解析】(1) 如图①, 连接 AC ,

$\because AT$ 是 $\odot O$ 切线, AB 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore AT \perp AB$, 即 $\angle TAB = 90^\circ$,

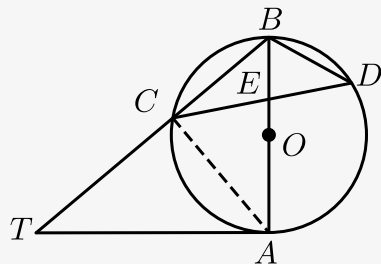
$\because \angle ABT = 50^\circ$,

$\therefore \angle T = 90^\circ - \angle ABT = 40^\circ$,

由 AB 是 $\odot O$ 的直径, 得 $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ABC = 40^\circ$,

$\therefore \angle CDB = \angle CAB = 40^\circ$.



图①

(2) 如图②, 连接 AD ,

在 $\triangle BCE$ 中, $BE = BC$, $\angle EBC = 50^\circ$,

$\therefore \angle BCE = \angle BEC = 65^\circ$,

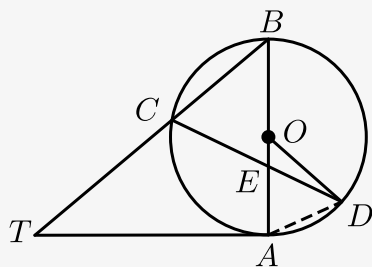
$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 65^\circ$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 65^\circ$,

$\because \angle ADC = \angle ABC = 50^\circ$,

$\therefore \angle CDO = \angle ODA - \angle ADC = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ$.



图②

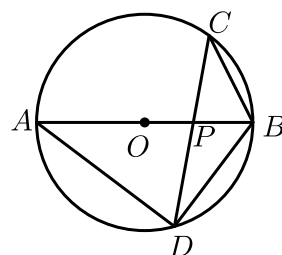
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】圆周角定理以及应用

【知识点】切线的性质定理

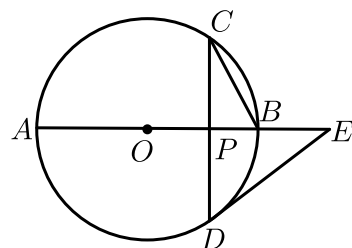
在 $\odot O$ 中，弦 CD 与直径 AB 相交于点 P ， $\angle ABC = 63^\circ$ 。

(1) 如图①，若 $\angle APC = 100^\circ$ ，求 $\angle BAD$ 和 $\angle CDB$ 的大小。



图①

(2) 如图②，若 $CD \perp AB$ ，过点 D 作 $\odot O$ 的切线，与 AB 的延长线相交于点 E ，求 $\angle E$ 的大小。



图②

【答案】 (1) 37° ; 27° .

(2) 36° .

【解析】 (1) $\because \angle APC$ 是 $\triangle PBC$ 的一个外角， $\angle ABC = 63^\circ$ ， $\angle APC = 100^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle APC - \angle PBC = 37^\circ ,$$

$\because$ 在 $\odot O$ 中， $\angle BAD = \angle C$ ，

$$\therefore \angle BAD = 37^\circ .$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

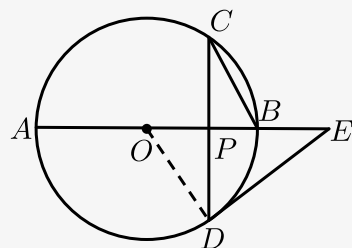
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ ,$$

$\because$ 在 $\odot O$ 中， $\angle ADC = \angle ABC = 63^\circ$ ，

$$\text{又 } \angle CDB = \angle ADB - \angle ADC ,$$

$$\therefore \angle CDB = 27^\circ .$$

(2) 如图，连接 OD ，



$\because CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle CPB = 90^\circ ,$$

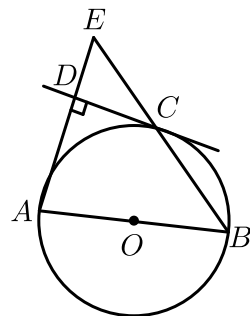
$$\therefore \angle PCB = 90^\circ - \angle PBC = 27^\circ ,$$

$\therefore$ 在 $\odot O$ 中, $\angle BOD = 2\angle BCD$,
 $\therefore \angle BOD = 54^\circ$,
 $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore OD \perp DE$, 即 $\angle ODE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle E = 90^\circ - \angle EOD$,
 $\therefore \angle E = 36^\circ$.

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

18. 2020~2021学年12月北京海淀区人大附中初三上学期月考第22题6分 ★★★

如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, AD 与过点 C 的切线互相垂直, 垂足为 D . 连接 BC 并延长, 交 AD 的延长线于点 E .



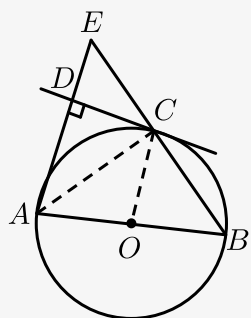
(1) 求证: $AE = AB$.

(2) 若 $AB = 10$, $BC = 6$, 求 CD 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $CD = \frac{24}{5}$.

【解析】 (1) 连接 AC 、 OC ,



$\therefore CD \perp AE$,
 $\therefore \angle CDE = 90^\circ$,
 又 $\because CD$ 为 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore \angle OCD = 90^\circ = \angle CDE$,
 $\therefore CO \parallel AE$,

$\because O$ 为 AB 中点 ,
 $\therefore CO$ 为 $\triangle BAE$ 中位线 ,
 $CO = \frac{1}{2}AE$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , CO 为斜边中线 ,
 $\therefore CO = \frac{1}{2}AB$,
 $\therefore AE = AB$.

(2) $\because AB = 10$, $BC = 6$,
 $\therefore CE = CB = 6$, $AE = AB = 10$,
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $AC = 8$,
 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$,
 又 $\because S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot 10$,
 $\therefore CD = \frac{24}{5}$.

【标注】【知识点】切线的性质定理

【能力】推理论证能力

19. 2021年天津河西区初三中考一模第21题10分 ★★★

在 $\odot O$ 中 , AB 为直径 , C 为 $\odot O$ 上一点 .

(1) 如图 1 , 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 , 与 AB 的延长线相交于点 P , 若 $\angle P = 42^\circ$, 求 $\angle CAB$ 的大小 .

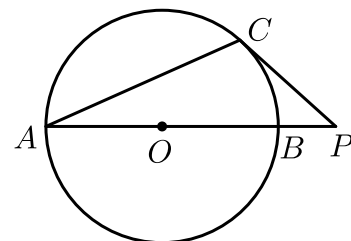


图 1

(2) 如图 2 , D 为 $\widehat{AC}$ 上一点 , 且 OD 经过 AC 的中点 E , 连接 DC 并延长 , 与 AB 的延长线相交于点 P , 若 $\angle CAB = 10^\circ$, 求 $\angle P$ 的大小 .

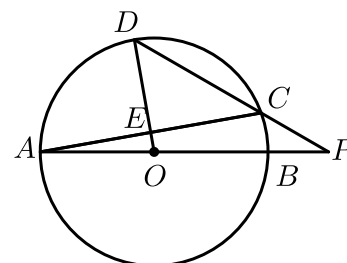
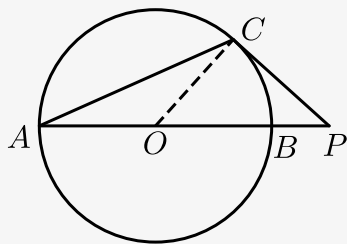


图 2

【答案】(1) 24° .

(2) 30° .

【解析】(1) 如图, 连接 OC ,



$\because \odot O$ 与 PC 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp PC$, 即 $\angle OCP = 90^\circ$,

$\because \angle P = 42^\circ$,

$\therefore \angle COB = 90^\circ - \angle P = 48^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle OPC$ 中, $\angle CAB + \angle ACO = \angle COP = 48^\circ$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle CAB = \angle ACO$,

$\therefore \angle CAB = 24^\circ$.

(2) $\because E$ 为 AC 的中点,

$\therefore OD \perp AC$, 即 $\angle AEO = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, 由 $\angle EAO = 10^\circ$,

得 $\angle AOE = 90^\circ - \angle EAO = 80^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 40^\circ$,

$\because \angle ACD$ 是 $\triangle ACP$ 的一个外角,

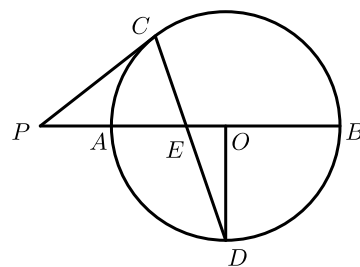
$\therefore \angle P = \angle ACD - \angle CAP = 30^\circ$.

【标注】【知识点】切线的性质定理

20. 2021年天津红桥区初三中考一模第21题10分 ★★★

已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E , 过点 C 作 $\odot O$ 的切线与 BA 的延长线交于点 P , $\angle P = 38^\circ$.

(1) 如图①, 若点 D 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 求 $\angle EDO$ 的大小.



图①

(2) 如图②, 若 $DO \parallel AC$, 求 $\angle EDO$ 的大小.

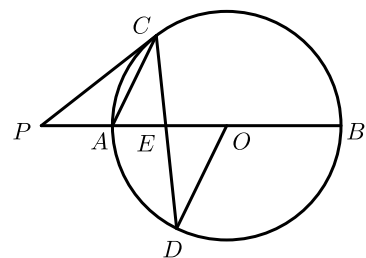


图 ②

【答案】(1) 19° .

(2) 32° .

【解析】(1) 连接 OC ,

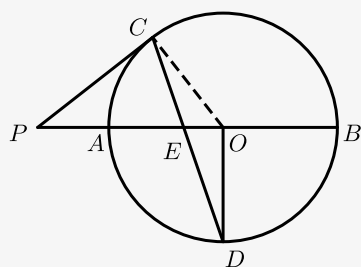


图 ①

$\because PC$ 是 $\odot O$ 切线 ,

$\therefore OC \perp PC$,

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$,

$\because \angle P = 38^\circ$,

$\therefore \angle POC = 180^\circ - \angle OCP - \angle P = 52^\circ$,

$\because D$ 是 $\widehat{AB}$ 中点 , AB 为 $\odot O$ 直径 ,

$\therefore OD \perp AB$,

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$,

$\therefore \angle COD = \angle AOD + \angle POC = 142^\circ$,

$\because OC = OD$,

$\therefore \angle EDO = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = \frac{180^\circ - 142^\circ}{2} = 19^\circ$.

(2) 连接 OC ,

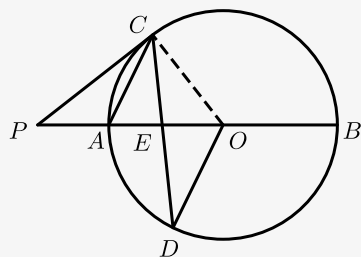


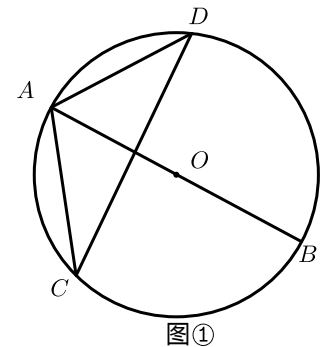
图 ②

$$\begin{aligned}
& \text{由 (1) 知 } \angle POC = 52^\circ, \\
& \because OA = OC, \\
& \therefore \angle OAC = \frac{180^\circ - \angle POC}{2} = \frac{180^\circ - 52^\circ}{2} = 64^\circ, \\
& \because OD \parallel AC, \\
& \therefore \angle AOD = \angle OAC = 64^\circ, \\
& \therefore \angle COD = \angle AOD + \angle POC = 116^\circ, \\
& \because OC = OD, \\
& \therefore \angle EDO = \frac{180^\circ - \angle COD}{2} = \frac{180^\circ - 116^\circ}{2} = 32^\circ.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

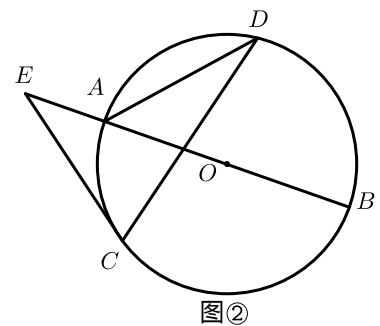
21. 2021年天津东丽区初三中考一模第21题10分 ★★★

如图， AB 是 $\odot O$ 直径， CD 是 $\odot O$ 的弦， $\angle ADC = 26^\circ$.



(1) 如图①，求 $\angle CAB$ 的度数 .

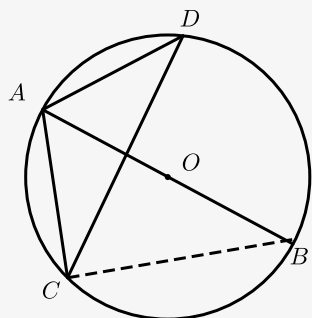
(2) 如图②，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，与 BA 的延长线相交于点 E ，求 $\angle E$ 的大小 .



【答案】(1) $\angle CAB = 64^\circ$.

(2) $\angle E = 38^\circ$.

【解析】(1) 连接 CB ,



图①

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径， C 为 $\odot O$ 上一点，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

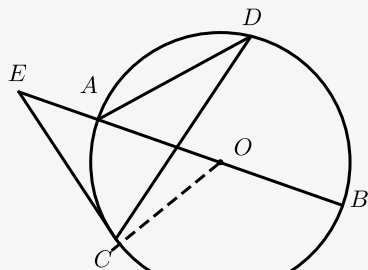
$\because \angle ADC$ 、 $\angle B$ 为 $\widehat{AC}$ 对应圆周角，

$\therefore \angle B = \angle ADC = 26^\circ$ ，

$\because \angle B + \angle CAB + \angle ACB = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle CAB = 64^\circ$ 。

(2) 连接 OC ， $\because CE$ 切 $\odot O$ 于 C ， OC 为 $\odot O$ 半径，



图②

$\therefore OC \perp CE$ ， $\angle OCE = 90^\circ$ ，

$\angle ADC$ 为 $\widehat{AC}$ 对应的圆周角，

$\angle AOC$ 为 $\widehat{AC}$ 对应的圆心角，

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 52^\circ$ ，

$\because \angle E + \angle AOC + \angle OCE = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle E = 38^\circ$ 。

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

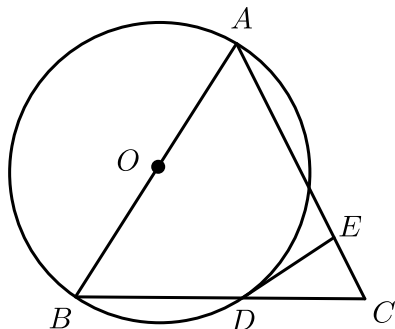
练习5

22. 2018年天津东丽区初三中考一模第21题10分 ★★★

如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， D 为 $\widehat{AC}$ 的中点，连接 OD 交弦 AC 于点 F ，过点 D 作 $DE \parallel AC$ ，交 BA 的延长线于点 E 。

23. 2016~2017学年天津南开区初三上学期期中第22题10分 ★★★

如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ ，与 BC 交于点 D ，过 D 作 AC 的垂线，垂足为 E 。
证明：



(1) $BD = DC$.

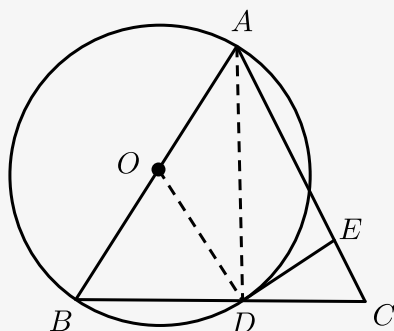
(2) DE 是 $\odot O$ 切线 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 AD ,

$\because AB$ 是直径 ,
 $\therefore$



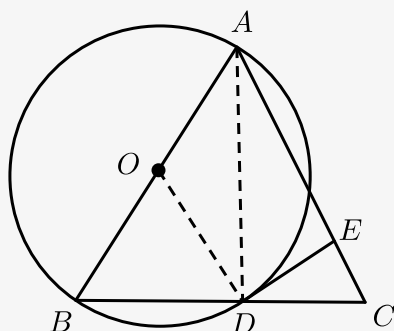
$$\angle ADB = 90^\circ ,$$

又 $\because AB = AC$,

$$\therefore BD = CD .$$

(2) 连接 OD ,

$\because$



$$\angle BAC = 2\angle BAD , \angle BOD = 2\angle BAD ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BOD ,$$

$$\therefore OD \parallel AC ,$$

又 $\because DE \perp AC$,

$$\therefore \angle AED = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle AED = 90^\circ ,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线 .

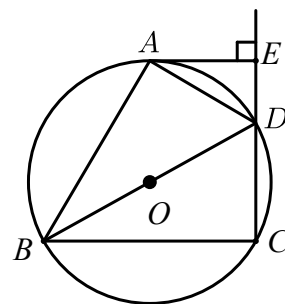
【标注】【知识点】切线的判定定理

24.

2019~2020学年广东广州荔湾区广州市荔湾区四中聚贤中学初三上学期期末模拟（广州四中教育集团）第21题12分

★★★

如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ， BD 是 $\odot O$ 的直径， $AE \perp CD$ ，垂足为 E ， DA 平分 $\angle BDE$.



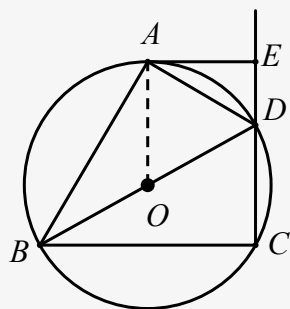
(1) 求证： AE 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) 若 $\angle DBC = 30^\circ$ ， $DE = 1\text{cm}$ ，求 BD 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 4cm .

【解析】 (1) 连接 OA ，



$\because DA$ 平分 $\angle BDE$ ，

$$\therefore \angle BDA = \angle EDA .$$

$$\because OA = OD ,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle EDA ,$$

$$\therefore OA \parallel CE .$$

$$\because AE \perp CE ,$$

$$\therefore AE \perp OA .$$

$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) $\because BD$ 是直径 ,

$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$.

$\because \angle DBC = 30^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$,

$\therefore \angle BDE = 120^\circ$.

$\because DA$ 平分 $\angle BDE$,

$\therefore \angle BDA = \angle EDA = 60^\circ$.

$\therefore \angle ABD = \angle EAD = 30^\circ$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中 , $\angle AED = 90^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$,

$\therefore AD = 2DE$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中 , $\angle BAD = 90^\circ$,

$\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$,

$\therefore BD = 2AD = 4DE$.

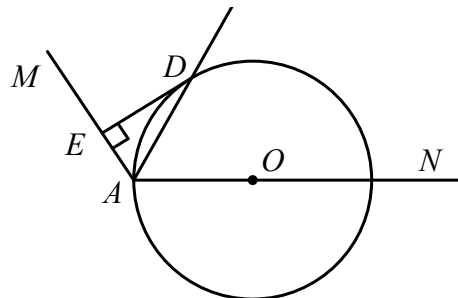
$\because DE$ 的长是 1cm ,

$\therefore BD$ 的长是 4cm .

【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

25. 2018~2019学年12月天津河西区天津市海河中学初三上学期月考第22题10分 ★★★

如图 , O 是 $\angle MAN$ 的边 AN 上一点 , 以 OA 为半径作 $\odot O$, 交 $\angle MAN$ 的平分线于点 D , $DE \perp AM$ 于 E .



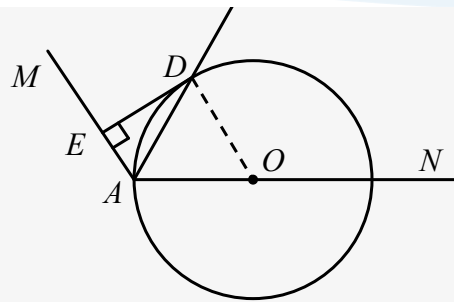
(1) 求证 : DE 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) 连接 OE , 若 $\angle EDA = 30^\circ$, $AE = 1$, 求 OE 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $OE = \sqrt{7}$.

【解析】 (1) 如图 , 连接 OD .



$\because AD$ 平分 $\angle MAN$,

$\therefore \angle EAD = \angle OAD$.

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle ODA = \angle OAD$.

$\therefore \angle EAD = \angle ODA$.

$\because DE \perp AM$ 于 E ,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$.

$\therefore \angle EAD + \angle EDA = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODA + \angle EDA = 90^\circ$.

$\therefore OD \perp ED$.

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because \angle EDA = 30^\circ$,

$\therefore \angle ODA = 60^\circ$.

$\because OA = OD$,

$\therefore \triangle ADO$ 为等边三角形.

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $AE = 1$,可得 $AD = 2$, $ED = \sqrt{3}$.

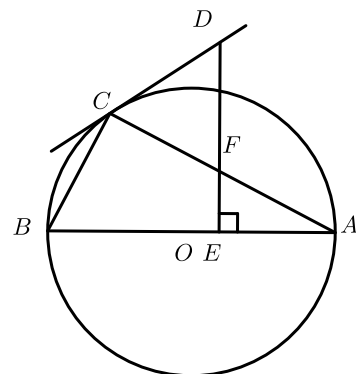
$\therefore OD = AD = 2$.

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中,由勾股定理可得, $OE = \sqrt{7}$.

【标注】【知识点】圆与等腰+平行线

26. 2020~2021学年天津红桥区初三上学期期末第23题10分 ★★

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, $\angle DCA = \angle B$.



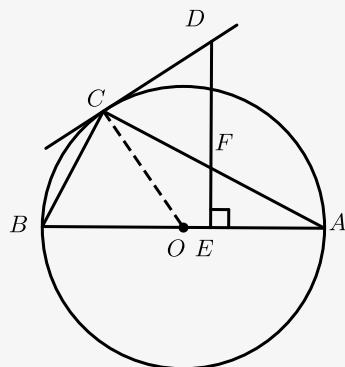
(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 若 $DE \perp AB$, 垂足为 E , DE 交 AC 于点 F , 求证 : $\triangle DCF$ 是等腰三角形 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) 连接 OC .

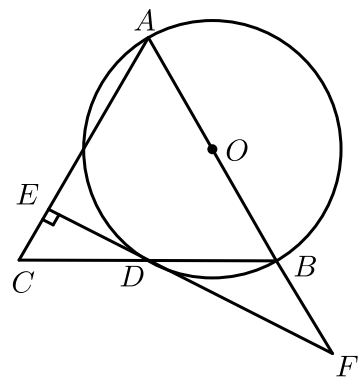


$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径 ,
 $\therefore \angle BCA = 90^\circ$,
 $\because OC = OB$,
 $\therefore \angle B = \angle BCO$,
 $\because \angle DCA = \angle B$,
 $\therefore \angle BCO = \angle DCA$,
 $\therefore \angle BCO + \angle ACO = \angle DCA + \angle ACO$,
 $\therefore \angle ACB = \angle DCO = 90^\circ$,
 即 $OC \perp CD$,
 $\because OC$ 过点 O ,
 $\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线 .

(2) $\because DE \perp AB$,
 $\therefore \angle FEA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle A + \angle EFA = 90^\circ$,
 同理 $\angle A + \angle B = 90^\circ$,
 $\therefore \angle B = \angle EFA$,
 $\because \angle DCA = \angle B$, $\angle DFC = \angle EFA$,
 $\therefore \angle DCF = \angle DFC$,
 $\therefore DC = DF$,
 即 $\triangle DCF$ 是等腰三角形 .

【标注】【知识点】切线的判定定理

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，过点 D 作 $EF \perp AC$ 于点 E ，交 AB 的延长线于点 F 。



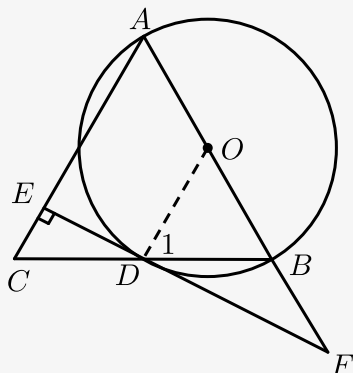
(1) 求证： EF 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 当 $AB = 5$ ， $BC = 6$ 时，求 DE 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $ED = \frac{12}{5}$ 。

【解析】 (1) 连接 OD ，



$$\therefore \angle 1 = \angle OBD,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle OBD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle C.$$

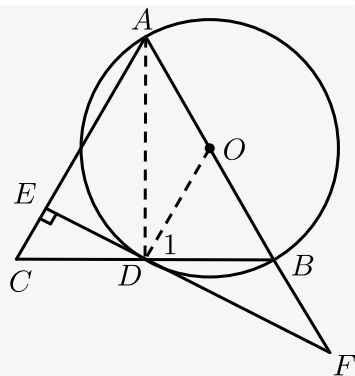
$$\therefore OD \parallel AC.$$

$$\because EF \perp AC,$$

$$\therefore EF \perp OD.$$

$$\therefore EF \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

(2) 连接 AD ，



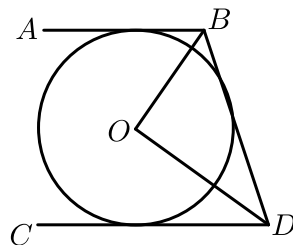
$$\begin{aligned}
 &\because AB \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径,} \\
 &\therefore \angle ADB = 90^\circ. \\
 &\text{又} \because AB = AC, \\
 &\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 3. \\
 &\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 4. \\
 &\because \frac{1}{2}AC \cdot ED = \frac{1}{2}AD \cdot CD, \\
 &\therefore ED = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】圆与勾股

练习6

28. 2015~2016学年江苏南京栖霞区初三上学期期中第12题2分 ★★★

如图， AB 、 CD 、 BD 都与 $\odot O$ 相切， $AB \parallel CD$ ， $OB = 2$ ， $OD = 3$ ，则 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】 $\because AB$ 、 CD 、 BD 都与 $\odot O$ 相切，

$\therefore OB$ 平分 $\angle ABD$ ， OD 平分 $\angle BDC$ ，

$\therefore \angle OBD = \frac{1}{2}\angle ABD$ ， $\angle ODB = \frac{1}{2}\angle BDC$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle BDC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle OBD + \angle ODB = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = 90^\circ$ ，

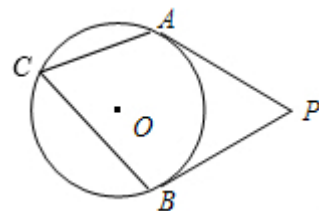
在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中， $BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

故答案为 $\sqrt{13}$.

【标注】【知识点】切线的性质定理

29. 2012~2013学年北京顺义区初三上学期期末第6题 ★★

如图, PA 、 PB 是 $\odot O$ 的切线, 切点分别为 A 、 B , C 为 $\odot O$ 上一点, 若 $\angle P = 50^\circ$, 则 $\angle ACB =$ () .



A. 40°

B. 50°

C. 65°

D. 130°

【答案】C

【解析】连接 OA 、 OB ,

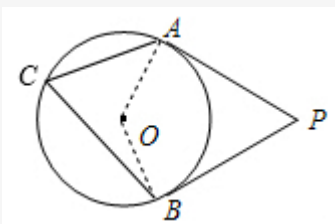
$\because PA$ 、 PB 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle AOB + \angle P = 180^\circ$.

$\because \angle P = 50^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 130^\circ$.

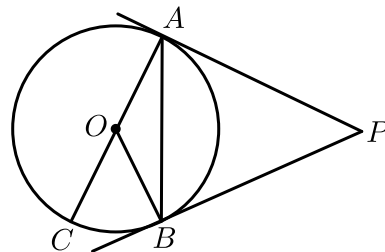
$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 65^\circ$.



【标注】【知识点】切线长定理

30. 2017~2018学年12月天津天津市益中学校初三上学期月考第14题3分 ★★★

如图, PA , PB 是 $\odot O$ 是切线, A , B 为切点, AC 是 $\odot O$ 的直径, 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 则 $\angle P =$ _____ 度 .



【答案】50

【解析】 $\because PA$, PB 是 $\odot O$ 的切线, A , B 为切点,

$\therefore PA = PB$, $\angle OBP = 90^\circ$,

$\because OA = OB$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle OBA &= \angle BAC = 25^\circ, \\ \therefore \angle ABP &= 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ, \\ \because PA &= PB, \\ \therefore \angle BAP &= \angle ABP = 65^\circ, \\ \therefore \angle P &= 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ.\end{aligned}$$

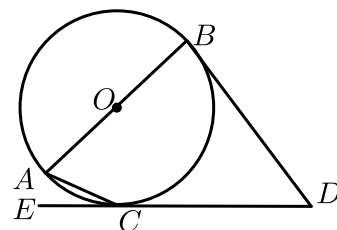
【标注】【知识点】切线长定理

31.

2020~2021学年浙江杭州拱墅区杭州市文澜中学初三上学期单元测试《直线与圆的位置关系》第5题

★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， DB 、 DE 分别切 $\odot O$ 于点 B 、 C ，若 $\angle ACE = 25^\circ$ ，则 $\angle D$ 的度数是（ ）.



A. 50°

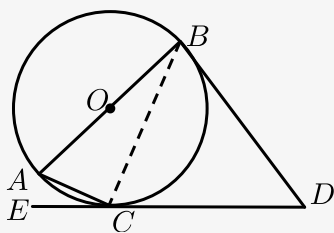
B. 55°

C. 60°

D. 65°

【答案】A

【解析】连接 BC ，



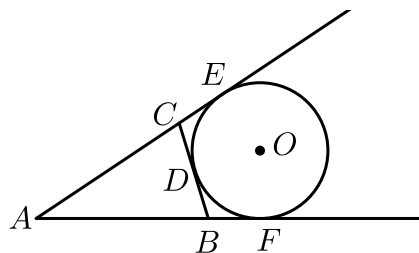
$$\begin{aligned}\because DB、DE &\text{分别切 } \odot O \text{ 于点 } B、C, \\ \therefore BD &= DC, \\ \because \angle ACE &= 25^\circ, \\ \therefore \angle ABC &= 25^\circ, \\ \because AB &\text{是 } \odot O \text{ 的直径}, \\ \therefore \angle ACB &= 90^\circ, \\ \therefore \angle DBC &= \angle DCB = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ, \\ \therefore \angle D &= 50^\circ.\end{aligned}$$

故选 A.

【标注】【知识点】切线长定理

32. 2019~2020学年广东广州番禺区广东番禺中学附属学校初三上学期期中第14题3分 ★★★

如图， $\triangle ABC$ 的周长为8， $\odot O$ 与 BC 相切于点 D 、与 AC 的延长线相切于点 E 、与 AB 的延长线相切于点 F ，则 AF 的长为_____.



【答案】 4

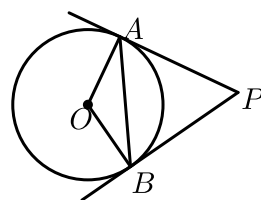
【解析】 $\because \odot O$ 与 BC 相切于点 D ，与 AC 的延长线相切于点 E ，与 AB 的延长线相切于点 F ，
 $\therefore$ 由切线长定理得 $AF = AE$ ， $CD = CE$ ， $BD = BF$ ，
 $\because C_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 8$ ，
 $\therefore AC + CD + DB + BA = AE + AF = 2AF = 8$ ，
 $\therefore AF = 4$ ．
 故答案为4．

【标注】【知识点】切线长定理

|| 练习7

33. 2016~2017学年吉林长春农安县农安县华家镇中学初三上学期期末第28题10分 ★★★

如图， PA 、 PB 是 $\odot O$ 的切线， A 、 B 为切点， $\angle OAB = 30^\circ$ ．



- (1) 求 $\angle APB$ 的度数．
 (2) 当 $OA = 3$ 时，求 AP 的长．

【答案】 (1) 60° ．

(2) $3\sqrt{3}$ ．

【解析】(1) $\because$ 在 $\triangle ABO$ 中，
 $OA = OB$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOB = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$ ，
 $\because PA$ 、 PB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OA \perp PA, OB \perp PB,$

即 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ,$

$\therefore$ 在四边形 $OAPB$ 中,

$$\angle APB = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

(2) 如图, 连接 OP ,

$\because PA, PB$ 是 $\odot O$

的切线,

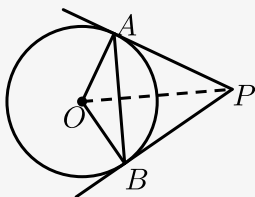
$\therefore PO$ 平分 $\angle APB$,

$$\text{即 } \angle APO = \frac{1}{2} \angle APB = 30^\circ,$$

又 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle OAP$ 中,

$$OA = 3, \angle APO = 30^\circ,$$

$$\therefore AP = \frac{OA}{\tan 30^\circ} = 3\sqrt{3}.$$



【标注】【知识点】切线的性质定理

【知识点】切线长定理

【知识点】 30° 特殊角的性质应用

【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

【知识点】勾股定理

【知识点】直接用勾股求边长

【知识点】多边形的内角和定理

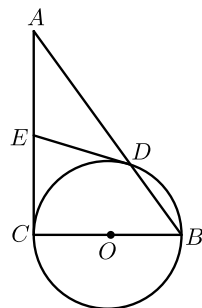
【知识点】求多边形的内角和

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

34. 2018~2019学年10月北京朝阳区陈经纶中学分校初三上学期月考第24题5分 ★★★

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D , $\odot O$ 的切线 DE 交 AC 于点 E .



(1) 求证: E 是 AC 的中点.

(2) 若 $AB = 10$, $BC = 6$, 连接 CD 、 OE , 交点为 F , 求 OF 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{9}{5}$.

【解析】(1) 连接 OD ,

$\because \angle C = 90^\circ$, BC 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore EC$ 为 $\odot O$ 的切线,

$$\angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$\because DE$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore EC = DE$, $DE \perp OD$,

$$\therefore \angle EDA + \angle ODB = 90^\circ,$$

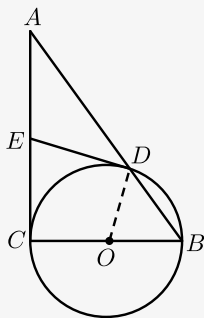
$\because OD = OB$,

$$\therefore \angle ODB = \angle B,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle A,$$

$$\therefore EA = DE,$$

$\therefore EA = EC$, 即 E 是 AC 的中点.



(2) 如图, 连接 OD .

$\because EC$ 、 DE 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore EO$ 平分 $\angle CED$,

$$EC = ED,$$

$\therefore EO \perp CD$, F 是 CD 的中点,

$\because$ 点 E 、 O 分别是 AC 、 BC 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 10$, $BC = 6$,

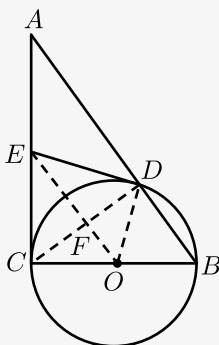
$$\therefore AC = 8,$$

$$\therefore ED = \frac{1}{2}AC = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle DOE$ 中, $OD = \frac{1}{2}BC = 3$,

$$\therefore DF = \frac{ED \times DO}{OE} = \frac{12}{5},$$

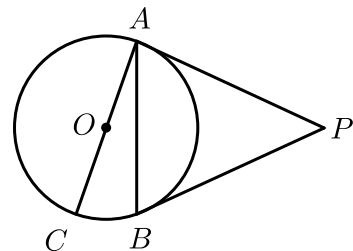
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OFD \text{ 中, } OF = \sqrt{3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{9}{5}.$$



【标注】【知识点】圆与勾股

35. 2020年江苏南通如皋市初三中考一模第24题8分 ★★★

如图, PA , PB 是 $\odot O$ 的切线, A , B 为切点, AC 是 $\odot O$ 的直径.



- (1) 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 求 $\angle P$ 的度数 .
 (2) 若 $\angle P = 60^\circ$, $PA = 2\sqrt{3}$, 求 AC 的长 .

【答案】 (1) 50° .

(2) 4 .

【解析】 (1) $\because PA$ 为切线 ,

$$\therefore OA \perp PA ,$$

$$\therefore \angle CAP = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle PAB = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ ,$$

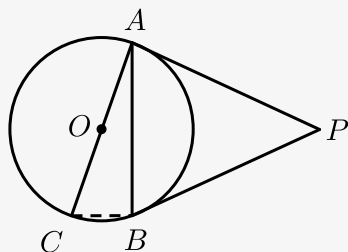
$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线 ,

$$\therefore PA = PB ,$$

$$\therefore \angle PBA = \angle PAB = 65^\circ ,$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ .$$

(2) 连接 BC ,



$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线 ,

$$\therefore PA = PB , \angle CAP = 90^\circ ,$$

$$\because \angle P = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle PAB$ 是等边三角形 ,

$$\therefore AB = PA = 2\sqrt{3} , \angle PAB = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAB = 30^\circ ,$$

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径 ,

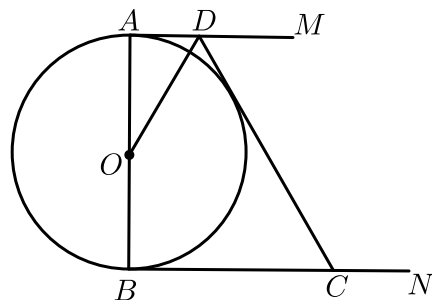
$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 .$$

【标注】 【知识点】切线长定理

36. 2017~2018学年广东广州天河区广州市天河外国语学校初三上学期期中第24题12分 ★★★

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AM 、 BN 分别与 $\odot O$ 相切于点 A 、 B ， CD 交 AM 、 BN 于点 D 、 C ， DO 平分 $\angle ADC$ 。



(1) 求证： CD 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 设 $AD = 4$ ， $AB = x (x > 0)$ ， $BC = y (y > 0)$ 。求 y 关于 x 的函数解析式。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $y = \frac{1}{16}x^2$ 。

【解析】 (1) 过 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E ，则 $\angle OED = 90^\circ$ 。

$\because \odot O$ 与 AM 相切于点 A ，

$\therefore \angle OAD = 90^\circ$ 。

$\because OD$ 平分 $\angle ADE$ ，

$\therefore \angle ADO = \angle EDO$ 。

$\because OD = OD$ ，

在 $\triangle OAD$ 与 $\triangle OED$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle ODA = \angle ODE \\ OD = OD \\ \angle OAD = \angle OED \end{cases},$$

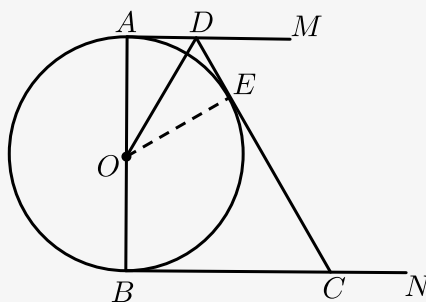
$\therefore \triangle OAD \cong \triangle OED$ 。

$\therefore OE = OA$ 。

$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore OE$ 是 $\odot O$ 的半径。

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线。



(2) 如图所示：过 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E ，

过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，则

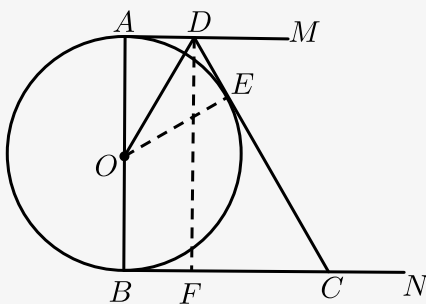
$$DF = AB = x。$$

$\because AD = 4$ ， $BC = y$ ，

$$\therefore CF = BC - AD = y - 4。$$

由切线长定理可得： $DE = DA$ ，

$$CE = CB，$$



$$\therefore CD = CE + ED = BC + AD = 4 + y$$

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中 ,

$$\therefore CD^2 = DF^2 + FC^2$$

$$\therefore (y+4)^2 = x^2 + (y-4)^2 .$$

$$\text{整理得: } y = \frac{1}{16}x^2 ,$$

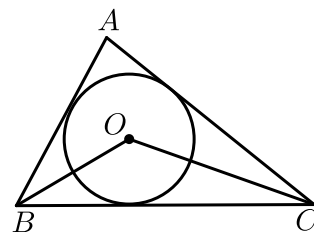
$$\text{则 } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式为: } y = \frac{1}{16}x^2 .$$

【标注】【知识点】切线长定理

练习8

37. 2020~2021学年12月江苏苏州姑苏区苏州市振华中学校初三上学期月考第8题3分 ★★

如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 80^\circ$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 则 $\angle BOC$ 的度数为 () .



A. 100°

B. 160°

C. 80°

D. 130°

【答案】D

【解析】 $\because \angle A = 80^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 100^\circ ,$$

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 内心 ,

$\therefore OB$ 平分 $\angle ABC$, OC 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle OCB = \frac{1}{2}\angle ACB ,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 50^\circ ,$$

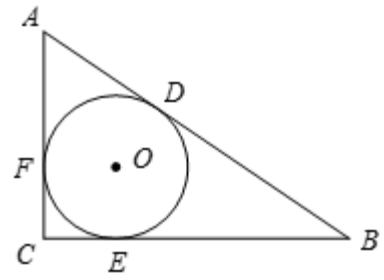
$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 130^\circ .$$

故选 D .

【标注】【知识点】三角形内切圆

38. 2015~2016学年广东广州越秀区初三上学期期末(模拟)第6题3分 ★★

如图, $\odot O$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边相切, 切点分别为 D 、 E 、 F , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $AB = 10$, 则 $\odot O$ 的半径等于 () .



A. 6

B. 4.8

C. 5

D. 2

【答案】 D

【解析】 设 $\odot O$ 半径 r ,

连接 OA 、 OB 、 OC 、 OD 、 OE 、 OF ,

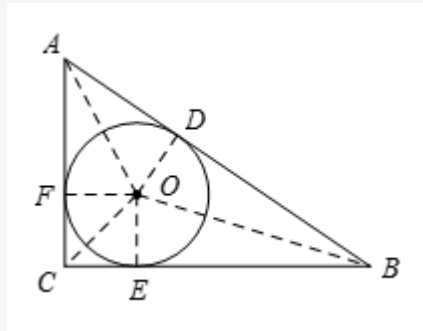
$\because \odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆,

切点为 D 、 E 、 F ,

$\therefore OD \perp AB$,

$OE \perp BC$,

$OF \perp AC$,



$OD = OE = OF = r$,

$\because AC = 6$, $BC = 8$,

根据勾股定理可知,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10,$$

$\therefore S_{\triangle ACB} = S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAB}$

$$\text{即 } \frac{1}{2}AC \times BC = \frac{1}{2}AC \times r + \frac{1}{2}BC \times r + \frac{1}{2}AB \times r$$

$$= \frac{1}{2}r(AC + BC + AB)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times r \times (6 + 8 + 10)$$

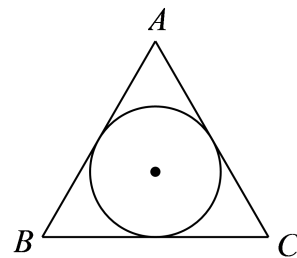
则 $r = 2$,

故答案为D.

【标注】【知识点】三角形五心

39. 2016~2017学年12月广东广州越秀区广东实验中学初三上学月月考第8题3分 ★★★

如图,边长为2的正三角形的内切圆半径是().



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】 B

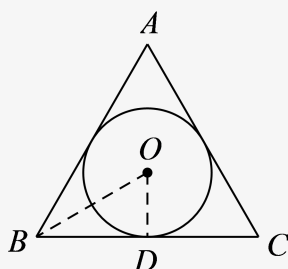
【解析】 如图，过圆心作 $OD \perp BC$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\angle OBD = 30^\circ,$$

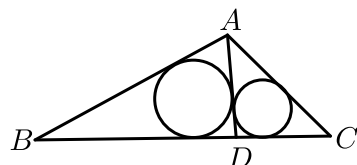
$$\therefore OD = \frac{\sqrt{3}}{3}BD = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



【标注】 【知识点】 三角形内切圆

40. ★★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $AC = \frac{8}{3}$ ，点 D 就是 BC 边上的一点， $BD = 2AD = 2CD$ ，设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内切圆半径分别为 r_1 ， r_2 ，则 $\frac{r_1}{r_2}$ 的值等于（ ）。



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 2

【答案】 C

【解析】 $BD = 2AD = 2CD$ ，设 $AD = CD = a$ ，则 $BD = 2a$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore AB = 4, AC = \frac{8}{3},$$

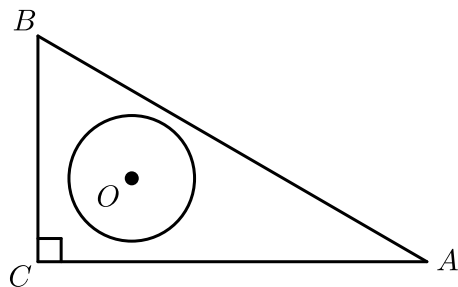
$$\therefore \frac{\frac{1}{2}(4 + 2a + a)r_1}{\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + a + a\right)r_2} = 2 \frac{3\left(a + \frac{4}{3}\right)r_1}{2\left(a + \frac{4}{3}\right)r_2} = 2,$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】三角形内切圆

41. 2017~2018学年江苏盐城江苏省盐城中学初三上学期期中第16题3分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， O 是 $\triangle ABC$ 的内心，以 O 为圆心， r 为半径的圆与线段 AB 有公共点，则 r 的取值范围是 _____ .



【答案】 $1 \leq r \leq \sqrt{10}$

【解析】作 $OD \perp AB$ 于 D ， $OE \perp BC$ 于 E ， $OF \perp AC$ 于 F ，连接 OA 、 OB ，如图所示，

则四边形 $OECF$ 是正方形，

$$\therefore OF = CF = OE = CE,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore$

$$CE = CF = OF = OE = (AC + BC - AB) \div 2 = 1,$$

$$\therefore AF = AC - CF = 3, BE = BC - CE = 2,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AF^2 + OF^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, OB = \sqrt{BE^2 + OE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

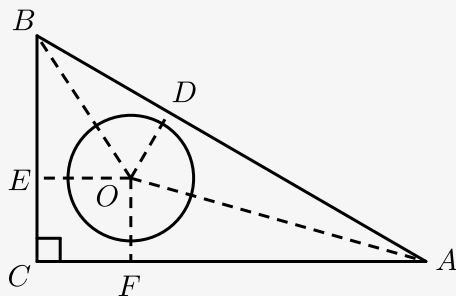
当 $r = 1$ 时，以 O 为圆心， r 为半径的圆与线段 AB 有唯一交点；

当 $1 < r \leq \sqrt{5}$ 时，以 O 为圆心， r 为半径的圆与线段 AB 有两个交点；

当 $\sqrt{5} < r \leq \sqrt{10}$ 时，以 O 为圆心， r 为半径的圆与线段 AB 有 1 个交点；

$\therefore$ 以 O 为圆心， r 为半径的圆与线段 AB 有交点，则 r 的取值范围是 $1 \leq r \leq \sqrt{10}$ ；

故答案为 $1 \leq r \leq \sqrt{10}$.



【标注】【知识点】根据直线与圆的位置关系求解

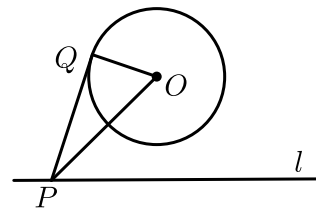
二、圆中最值问题



练习9

42. 2017~2018学年11月广东广州越秀区广州市第十六中学初三上学期月考63分 ★★

如图， $\odot O$ 的半径为2，点 O 到直线 l 的距离为3，点 P 是直线 l 上的一个动点， PQ 切 $\odot O$ 于点 Q ，则 PQ 的最小值为（ ）.



A. $\sqrt{13}$

B. $\sqrt{5}$

C. 3

D. 2

【答案】B

【解析】 $\because PQ$ 切 $\odot O$ 于点 Q ,

$$\therefore \angle OQP = 90^\circ,$$

$$\therefore PQ^2 = OP^2 - OQ^2,$$

$$\text{而 } OQ = 2,$$

$$\therefore PQ^2 = OP^2 - 4,$$

$$\text{即 } PQ = \sqrt{OP^2 - 4},$$

当 OP 最小时， PQ 最小，

$\because$ 点 O 到直线 l 的距离为3，

$\therefore OP$ 的最小值为3，

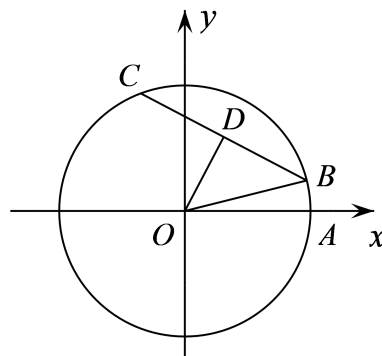
$\therefore PQ$ 的最小值为 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

故选B.

【标注】【知识点】圆与勾股

43. 2016~2017学年广东广州越秀区广州市执信中学初三上学期期中第10题3分 ★★★

如图所示在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为圆心的圆过点 $A(10\sqrt{2}, 0)$ ，直线 $y = kx - 6k + 8$ 与 $\odot O$ 交于 B 、 C 两点，则弦 BC 的长的最小值为（ ）.



A. 20

B. 18

C. 16

D. 22

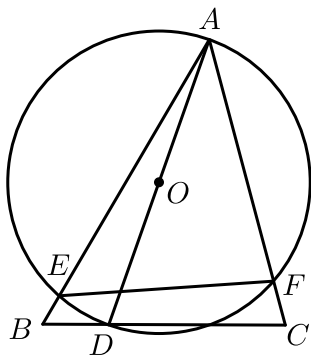
【答案】 A

【解析】 $\because$ 直线 $y = kx - 6k + 8$ 必过点 $D(6, 8)$,
 $\therefore$ 最短的弦 CB 是过点 D 且与该圆直径垂直的弦 ,
 $\therefore$ 点 D 的坐标是 $(6, 8)$,
 $\therefore OD = 10$,
 $\therefore$ 以原点 O 为圆心的圆过点 $A(10\sqrt{2}, 0)$,
 $\therefore$ 圆的半径为 $10\sqrt{2}$,
 $\therefore OB = 10\sqrt{2}$,
 $\therefore BD = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 10^2} = 10$,
 $\therefore BC$ 的长的最小值 $2BD$, 即为 20 .
 故选 A .

【标注】 【知识点】垂径定理以及应用

44. 2019~2020学年12月天津和平区天津市兴南中学初三上学期月考第12题 ★★★

如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$, 点 D 是 BC 边上一个动点, 以 AD 为直径作 $\odot O$, 分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F , 若弦 EF 长度的最小值为 1, 则 AB 的长为 () .

A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

C. 1.5

D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ **【答案】** B

【解析】 $\because \angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = 75^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 45^\circ$.
 $\therefore \angle EOF = 2\angle BAC = 90^\circ$.
 $\because OE = OF$,
 $\therefore \triangle EOF$ 是等腰直角三角形 .
 $\therefore EF = \sqrt{2}OE = \sqrt{2}R = 1$.

$$\therefore R = \frac{\sqrt{2}}{2} . AD = 2R = \sqrt{2} .$$

当 EF 长度最小时, R 最小,

$\therefore$ 直径 AD 最小.

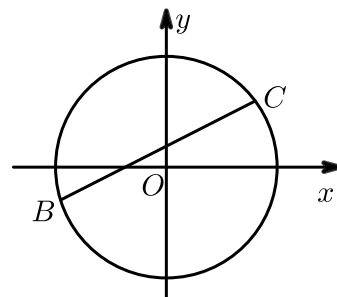
显然当 $AD \perp BC$ 时 AD 最小. 此时 $\frac{AD}{AB} = \sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore AB = \frac{2\sqrt{6}}{3} .$$

【标注】【知识点】圆中最值

45. ★★

如图, 直线 $y = kx - 3k + 4$ 与 $\odot O$ 交于 B 、 C 两点, 若 $\odot O$ 的半径为 13, 求弦 BC 长度的最小值.



【答案】 24 .

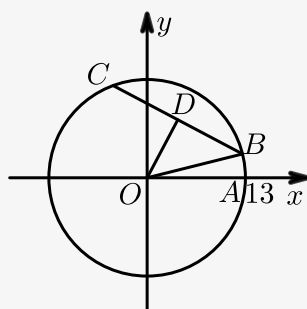
【解析】 $y = kx - 3k + 4$ 必过点 $D(3, 4)$,

$\therefore$ 最短的弦 BC 是过点 D 且与该圆直径垂直的弦,

$$\therefore OD = 5, OB = 13,$$

$$\therefore BD = 12,$$

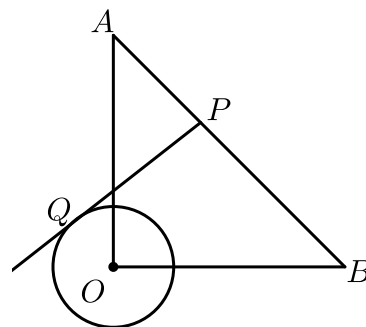
$\therefore BC$ 的长的最小值为 24 .



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

46. 2017年浙江湖州吴兴区初三中考一模第15题4分 ★★★

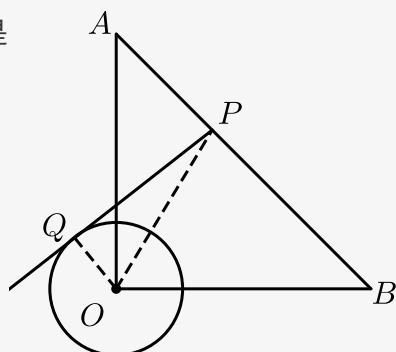
如图, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OA = OB = 4\sqrt{2}$, $\odot O$ 的半径为 1, 点 P 是 AB 边上的动点, 过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ (点 Q 为切点), 切线 PQ 的最小值为 _____ .



【答案】 $\sqrt{15}$

【解析】 连接 OP , OQ , 如图所示,

$\because PQ$ 是
 O 的切
线,
 $\therefore$



$OQ \perp PQ$,

根据勾股定理知: $PQ^2 = OP^2 - OQ^2$,

$\therefore$ 当 $PO \perp AB$ 时, 线段 PQ 最短,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OA = OB = 4\sqrt{2}$,

$\therefore AB = \sqrt{2}OA = 8$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}AB \cdot OP$,

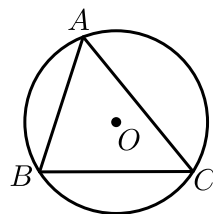
即 $OP = \frac{OA \cdot OB}{AB} = 4$,

$\therefore PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{15}$.

【标注】 【知识点】 切线的性质定理

47. ★★★★★

如图, 已知 $\odot O$ 的半径 2, 弦 BC 的长为 $2\sqrt{3}$, 点 A 的弦 BC 所对优弧上任意一点 (B 、 C 两点除外).



(1) 求 $\angle BAC$ 的度数.

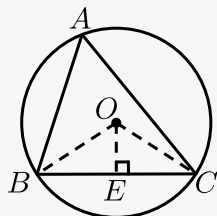
(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】 (1) 60° .

(2) $\triangle ABC$ 面积的最大值 $3\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 方法一:

如图, 连结 OB 、 OC , 过 O 作 $OE \perp BC$ 交 BC 于点 E .



$\because OE \perp BC, BC = 2\sqrt{3},$

$\therefore BE = EC = \sqrt{3}.$

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中, $OB = 2, \sin \angle BOE = \frac{BE}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

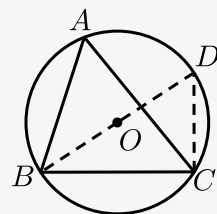
$\therefore \angle BOC = 120^\circ,$

$\therefore \angle BOE = 60^\circ,$

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ.$

方法二:

如图, 连结 BO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 D , 连结 CD .



$\because BD$ 是直径,

$\therefore BD = 4, \angle DCB = 90^\circ.$

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中, $\sin \angle BDC = \frac{BC}{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$\therefore \angle BDC = 60^\circ,$

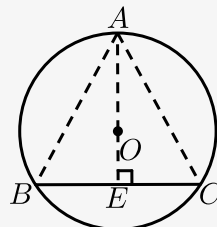
$\therefore \angle BAC = \angle BDC = 60^\circ.$

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的长不变, 所以当 BC 边上的高最大时, $\triangle ABC$ 的面积最大,

此时点 A 应落在优弧 BC 的中点处.

如图, 过 O 作 $OE \perp BC$ 于点 E , 延长 EO 交于点 A , 则 A 为优弧 BC 的中点.

连结 $AB, AC,$



则 $AB = AC, \angle BAE = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $BE = \sqrt{3}, \angle BAE = 30^\circ,$

$\therefore AE = \frac{BE}{\tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3.$

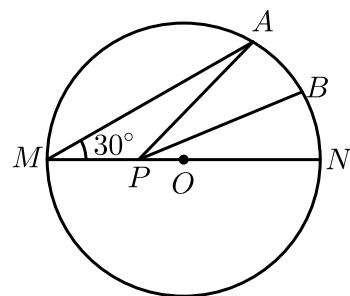
$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆与三角函数

练习10

48. 2016~2017学年12月广东广州越秀区广州市铁一中学初三上学期月考第10题3分 ★★

如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， $MN = 2$ ，点 A 在 $\odot O$ 上， $\angle AMN = 30^\circ$ ， B 为弧 AN 的中点， P 为直径 MN 上一动点，则 $PA + PB$ 的最小值为（ ）.



A. $2\sqrt{2}$

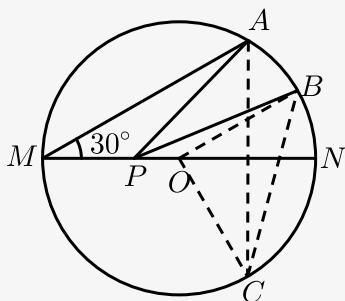
B. $\sqrt{2}$

C. 1

D. 2

【答案】B

【解析】过 A 作 MN 的垂线交 $\odot O$ 于 C ，连接 CB ，易知 $PA + PB$ 的最小值为 CB ，连接 OB ， OC



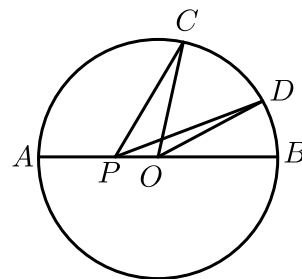
$\therefore \triangle OBC$ 为直角三角形，

$\therefore BC = \sqrt{2}$ ，选B.

【标注】【知识点】弧、弦、圆心角关系

49. 2015~2016学年2月湖北武汉江岸区武汉二中广雅中学初三下学期月考第10题3分 ★★

如图，已知 $\odot O$ 的半径是 R ， C ， D 是直径 AB 同侧圆周上的两点，弧 AC 的度数为 96° ，弧 BD 的度数为 36° ，动点 P 在 AB 上，则 $PC + PD$ 的最小值为（ ）.



A. $2R$

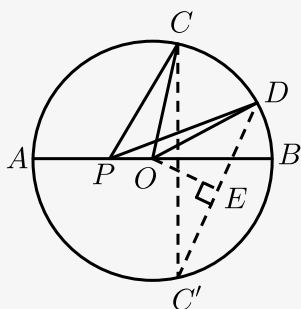
B. $\sqrt{3}R$

C. $\sqrt{2}R$

D. R

【答案】 B

【解析】 连接 DC' ,



根据题意以及垂径定理 ,

得弧 $C'D$ 的度数是 120° ,

则 $\angle C'OD = 120^\circ$.

作 $OE \perp C'D$ 于 E ,

则 $\angle DOE = 60^\circ$, 则

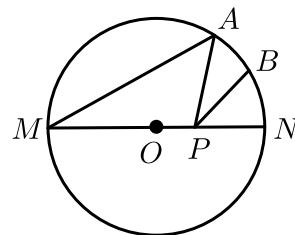
$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2}R ,$$

$$C'D = \sqrt{3}R .$$

【标注】 【知识点】垂径定理以及应用

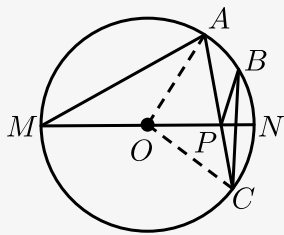
50. 2017年天津河北区初三毕业考试第18题3分 ★★★

如图 , MN 是 $\odot O$ 的直径 , $MN = 2$, $\angle AMN = 30^\circ$, 点 B 为 $\widehat{AN}$ 的中点 , P 是直径 MN 上一动点 , 则 $PA + PB$ 的最小值为 _____ .



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 作点 B 关于 MN 的对称点 C ，连接 AC 交 MN 于点 P ，则 P 点就是所求作的点。



此时 $PA + PB$ 最小，且等于 AC 的长。

连接 OA ， OC ，

$\because \angle AMN = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AON = 60^\circ$ ，

$\therefore \widehat{AN}$ 的度数是 60° ，

则 $\widehat{BN}$ 的度数是 30° ，

根据垂径定理得 $\widehat{CN}$ 的度数是 30° ，

则 $\angle AOC = 90^\circ$ ，又 $OA = OC = 1$ ，

则 $AC = \sqrt{2}$ 。

【标注】 【知识点】轴对称的性质

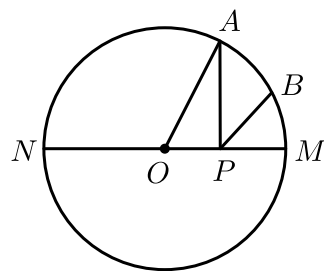
【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】两点之间线段最短

【能力】推理论证能力

51. 2013~2014学年北京房山区初三上学期期末第11题 ★★★

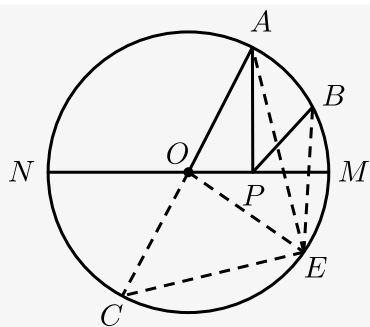
如图，点 A 是半圆上一个三等分点，点 B 是 $\widehat{AM}$ 的中点，点 P 是直径 MN 上一动点，若 $\odot O$ 的半径为 1，则 $AP + BP$ 的最小值是 _____。



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】 作点 B 关于 MN 的对称点 E ，连接 AE 交 MN 于点 P ，此时 $PA + PB$ 最小，且等于 AE 。

作直径 AC ，连接 CE ， OE ，

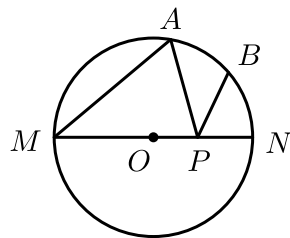


又 $\because B$ 是 $\widehat{AM}$ 的中点，
 $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BM} = \widehat{ME} = \frac{1}{2}\widehat{AM}$ ，
 又 $\because A$ 是半圆的三等分点，
 $\therefore \angle AOM = 60^\circ$ ， $\angle MOE = \frac{1}{2}\angle AOM = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOE = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAE = 45^\circ$ ，
 又 $\because AC$ 为圆的直径，
 $\therefore \angle AEC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = \angle CAE = 45^\circ$ ，
 $\therefore CE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \sqrt{2}$ ，即 $AP + BP$ 的最小值是 $\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】圆中最值

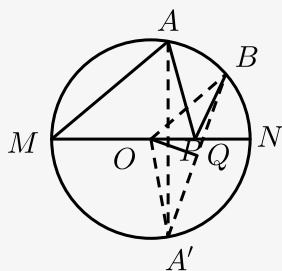
52. 2018~2019学年9月江苏苏州高新区苏州高新区第一初级中学初三上学期周测第18题 ★★

如图， MN 是 $\odot O$ 的直径， $MN = 4$ ， $\angle AMN = 40^\circ$ ，点 B 为弧 AN 的中点，点 P 是直径 MN 上的一个动点，则 $PA + PB$ 的最小值为 _____。



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】 过 A 点作关于直线 MN 的对称点 A' ，连接 $A'B$ ，



由轴对称的性质可知 $A'B$ 即为 $PA + PB$ 的最小值 ,

连接 OB , OA' , AA' .

$\because AA'$ 关于直线 MN 对称 ,

$\therefore \widehat{AN} = \widehat{A'N}$.

$\therefore \angle AMN = 40^\circ$,

$\therefore \angle A'ON = 80^\circ$, $\angle BON = 40^\circ$,

$\therefore \angle A'OB = 120^\circ$.

过 O 点作 $OQ \perp A'B$ 于点 Q ,

在 $Rt\triangle A'OQ$ 中 , $OA' = 2$,

$\therefore A'B = 2A'Q = 2\sqrt{3}$,

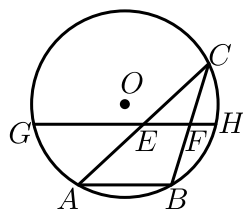
即 $PA + PB$ 的最小值 $2\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】圆与最值问题

练习11

53. 初三上学期单元测试《圆》圆的概念和性质第25题 ★★★

如图 , AB 是 $\odot O$ 的一条弦 , 点 C 是 $\odot O$ 上一动点 , 且 $\angle ACB = 30^\circ$, 点 E 、 F 分别是 AC 、 BC 的中点 , 直线 EF 与 $\odot O$ 交于 G 、 H 两点 . 若 $\odot O$ 的半径为 7 , 则 $GE + FH$ 的最大值为 _____ .



【答案】 10.5 或 $10\frac{1}{2}$ 或 $\frac{21}{2}$

【解析】 连接 OA , OB ,

$\because \angle ACB = 30^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$,

$\therefore OA = OB = AB = 7$,

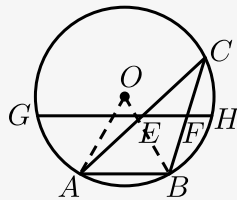
$\because E$ 、 F 分别为 AC 、 BC 的中点 ,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = 3.5$,

$\because GE + FH = GH - EF$, 要使 $GE + FH$ 最大 , 而 EF 为定值 ,

$\therefore GH$ 取最大值时 $GE + FH$ 有最大值 ,

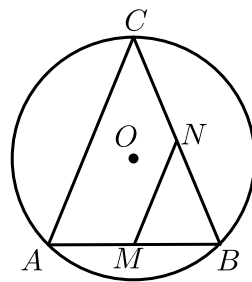
$\therefore$ 当 GH 为直径时 , $GE + FH$ 的最大值为 $14 - 3.5 = 10.5$.



【标注】【知识点】圆周角定理以及应用

54. 2016年广东广州天河区初三中考一模第16题3分 ★★★

如图， AB 为 $\odot O$ 的弦， $AB = 6$ ，点 C 是 $\odot O$ 上的一个动点，且 $\angle ACB = 45^\circ$ ，若点 M 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点，则 MN 长的最大值是 _____ .



【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】 如图所示，连接 OA ， OB ，

$$\because \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ.$$

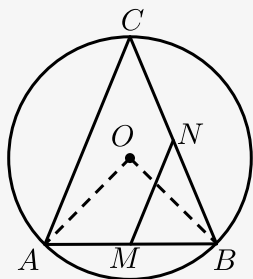
$$\because AB = 6,$$

$$\therefore OA = 3\sqrt{2}.$$

$\because M$ 、 N 分别是 AB 、 BC 的中点，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AC,$$

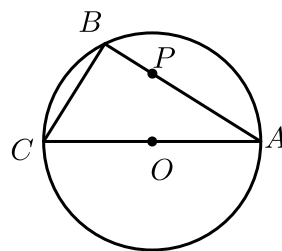
当 AC 为 $\odot O$ 的直径时， MN 取得最大值，最大值为 $3\sqrt{2}$.



【标注】 【知识点】 圆周角定理以及应用

55. 2020~2021学年9月湖南长沙天心区长郡中学初三上学期月考（长郡教育集团）第12题3分 ★★

如图， P 为 $\odot O$ 内一定点， A 为 $\odot O$ 上一个动点，射线 AP 、 AO 分别与 $\odot O$ 交于 B 、 C 两点. 若 $\odot O$ 的半径长为 3 ， $OP = \sqrt{3}$ ，则弦 BC 的最大值为 () .



A. $2\sqrt{3}$

B. 3

C. $\sqrt{6}$

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于 E ，如图：

$\because O$ 为圆心，

$\therefore AE = BE$ ，

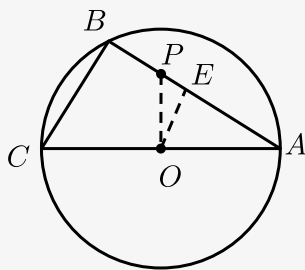
$\therefore OE = \frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore OE \leq OP$ ，

$\therefore BC \leq 2OP$ ，

$\therefore$ 当 $E、P$ 重合时，即 OP 垂直 AB 时， BC 取最大值，

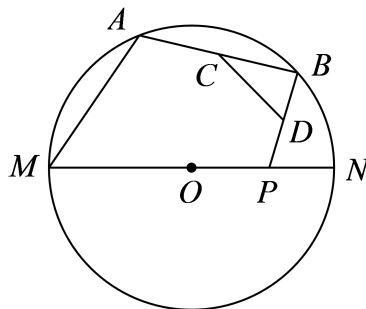
最大值为 $2OP = 2\sqrt{3}$ 。



【标注】 【知识点】 垂径定理以及应用

56. 2015~2016学年广东广州天河区广州市第四十七中学校初三上学期中第10题3分 ★★★

如图，点 P 在 $\odot O$ 的直径 MN 上运动， $A、B$ 是同一个半圆上的两点， $C、D$ 分别是 $AB、BP$ 的中点，已知 $MN = 5$ ， $AM = 3$ ，那么 CD 的最小值等于（ ）。



A. $\frac{12}{5}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{6}{5}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】 C

【解析】 连接 AN ， $AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = 4$ ，

$\because C、D$ 分别是 $AB、BP$ 的中点，

$\therefore CD$ 是 AP 边上的中位线，

$\therefore CD = \frac{1}{2}AP$ ，

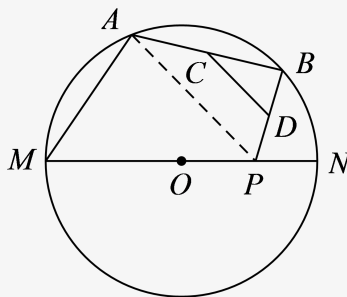
$\therefore$ 当 AP 达到最小时， CD 有最小值，

又当 $AP \perp MN$ ， AP 最小，

此时 $AP = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$ ，

$\therefore CD$ 的最小值为： $\frac{1}{2} \times \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$ ，

故本题正确答案选 C。



练习12

57. 2015~2016学年北京房山区燕山前进中学初三上学期期中第5题3分 ★★★

已知点 P 到圆上各点的最大距离为 5，最小距离为 1，则圆的半径为 () .

- A. 2或3 B. 3 C. 4 D. 2或4

【答案】A

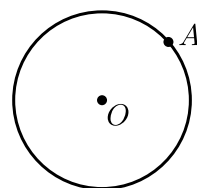
【解析】当点 P 在圆内，则圆的直径 $= 5 + 1 = 6$ ，所以圆的半径 $= 3$ ；

当点 P 在圆外，则圆的直径 $= 5 - 1 = 4$ ，所以圆的半径 $= 2$.

【标注】【知识点】点与圆上一点间距离的最大、最小值

58. 2019~2020学年北京西城区北京六十六中初三上学期期中第16题2分 ★★★

如图， $\odot O$ 的半径是 5，点 A 在 $\odot O$ 上. P 是 $\odot O$ 所在平面内一点，且 $AP = 2$ ，过点 P 作直线 l ，使 $l \perp PA$.



(1) 点 O 到直线 l 距离的最大值为 _____ .

(2) 若 M ， N 是直线 l 与 $\odot O$ 的公共点，则当线段 MN 的长度最大时， OP 的长为 _____ .

【答案】(1) 7

(2) $\sqrt{21}$

【解析】(1) $\because A$ 在 $\odot O$ 上，且 $AP = 2$ ，

$\therefore P$ 是在以 A 为圆心，2为半径，

$\therefore$ 过点 P 的 $l \perp PA$ ，

$\therefore l$ 为过 P 点的 $\odot O$ 的切线，

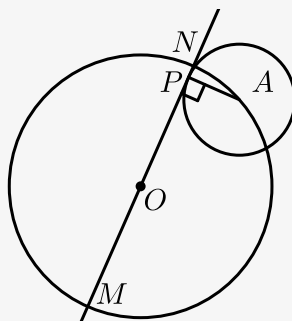
线，

当 P 点在射线 OA 与 $\odot A$ 的交点时，

O 到 l 的距离的最大为 $5 + 2 = 7$.

(2) 当 l 经过 $\odot O$ 的直径时，

MN 为 $\odot O$ 的直径时，



$$OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} .$$

【标注】【知识点】圆中对称性

【知识点】切线的性质定理

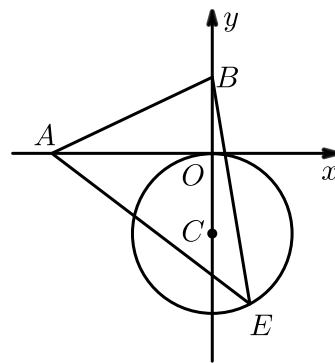
【知识点】圆与勾股

【能力】运算能力

【思想】数形结合思想

59. 2016~2017学年12月湖北武汉蔡甸区初三上学期月考第10题3分 ★★★

如图，已知 A 、 B 两点的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(0, 1)$ ， $\odot C$ 的圆心坐标为 $(0, -1)$ ，半径为 1， E 是 $\odot C$ 上一动点，则 $\triangle ABE$ 面积的最大值为（ ）。



A. $4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $3 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】D

【解析】过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

$$\because A(-2, 0), B(0, 1),$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\because C(0, -1),$$

$$\therefore BC = 2,$$

又 $\because$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} BC \cdot AO,$$

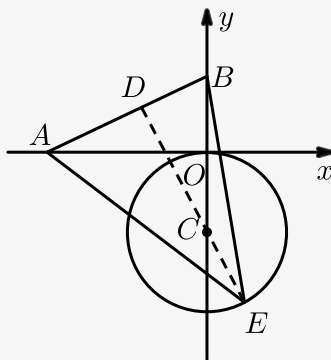
$$\therefore CD = \frac{2 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \sqrt{5}.$$

当 E 、 C 、 D 三点共线时 $\triangle ABE$ 面积最大，

$$\because \odot C \text{ 半径为 } 1,$$

$$\therefore DE = \frac{4}{5} \sqrt{5} + 1,$$

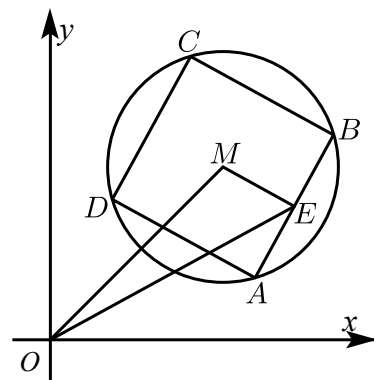
$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = 2 + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



【标注】【知识点】圆与勾股

60. 2020~2021学年12月江苏苏州姑苏区苏州市草桥中学校初三上学期月考第18题3分 ★★

如图，已知 $M(3,3)$ ， $\odot M$ 的半径为 2，四边形 $ABCD$ 是 $\odot M$ 的内接正方形， E 为 AB 中点，当正方形 $ABCD$ 绕圆心 M 转动时， $\triangle OME$ 的面积最大值为 _____ .



【答案】 3

【解析】 $\because OM, ME$ 是定值，

$\therefore$ 当 $ME \perp OM$ 时， $\triangle OME$ 的面积最大，

$\because M(3,3)$ ，

$\therefore OM = 3\sqrt{2}$ ，

$\because \odot M$ 的半径为 2，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ，

$\therefore ME = \sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle OME$ 的面积的最大值 $= \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$.

【标注】 【知识点】圆内接四边形综合